CORREZIONE

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2015–2016

14 giugno 2016

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcoli

i) l'insieme dei valori di α per cui è possibile applicare il metodo di Thomas;

ii) Per $\alpha = 0$ si trovi la soluzione del sistema (1) con il metodo di fattorizzazione $A = LDL^T$, con L matrice bidiagonale triangolare inferiore avente elementi unitari sulla diagonale principale e D matrice diagonale.

Risoluzione

- Per poter applicare il metodo di Thomas è necessario che i minori principali di A siano non nulli.

$$A_1 = 2 \neq 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \det(A) = 4\alpha - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$$

  Segue che si può apllicare il metodo di Thomas per $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq \frac{1}{2},\ 1$.

- Dalla relazione

$$A = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_1 & 0 \\ 0 & 1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  si ricava il sistema

$$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_1\ell_1 = -1 \\ d_2 + d_1\ell_1^2 = 0 \\ d_2\ell_2 = -1 \\ d_3 + d_2\ell_2^2 = 0 \end{cases} \implies L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Risoluzione del sistema:

$$LDL^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \begin{cases} L\mathbf{z} = \mathbf{b} \\ D\mathbf{y} = \mathbf{z} \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Risolvendo si ricava:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Per approssimare l'integrale di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$, si consideri la seguente formula di quadratura

$$I_2(f) = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i), \tag{2}$$

con $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$ e con $w_0 = \frac{5}{9}$, $w_1 = \frac{16}{9}$, $w_2 = -\frac{1}{3}$.
Calcolare il grado di esattezza (o precisione) r della formula (2).

Risoluzione
Per calcolare il grado di esattezza è necessario individuare il grado massimo r dei polinomi che vengono integrati esattamente dalla formula, cioè, determinare il massimo r per cui vale

$$I_2(x^k) = \int_{-1}^{1} x^k dx \quad per k = 0, \ldots, r \qquad I_2(x^{r+1}) \neq \int_{-1}^{1} x^{r+1} dx.$$

$$\begin{aligned}
k &= 0: \quad I_2(x^0) = I_2(1) = \sum_{i=0}^{2} w_i = \frac{5}{9} + \frac{16}{9} - \frac{1}{3} = 2 = \int_{-1}^{1} dx \\
k &= 1: \quad I_2(x) = \frac{5}{9} \cdot (-1) + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 = \int_{-1}^{1} x dx \\
k &= 2: \quad I_2(x^2) = \frac{5}{9} \cdot (-1)^2 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx \\
k &= 3: \quad I_2(x^3) = \frac{5}{9} \cdot (-1)^3 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = -\frac{2}{3} \neq 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx
\end{aligned}$$

da cui si deduce che il grado di esattezza è $r = 2$.

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo ad un passo, dipendente da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) f(t_n, u_n) + \frac{\alpha}{3} f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right]. \tag{3}$$

Si determini per quali valori di h il metodo (4) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{4}$$

con $\lambda \leq 0$.

Risoluzione

Due modi:

1. Si osservi che posto $\theta = \frac{\alpha}{3}$, il metodo dato coincide con il θ-metodo. Quindi, ricordando i risultati del θ-metodo, cioè:

   - $\theta \geq \frac{1}{2}$ metodo assolutamente incondizionatamente stabile;
   - $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ metodo assolutamente stabile se $(\theta - \frac{1}{2})h\lambda < 1$

   si ha:

   - $\alpha \geq \frac{3}{2}$ metodo assolutamente incondizionatamente stabile;
   - $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ metodo assolutamente stabile se $(\frac{\alpha}{e} - \frac{1}{2})h\lambda < 1$ o, equivalentemente $(3\alpha - 2)h\lambda < 6$.

2. Applicando il metodo (3) al problema (4) si ottiene:

   $$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)(-10u_n) + \frac{\alpha}{3}(-10u_{n+1})\right].$$

   ovvero

   $$u_{n+1} = \left(1 + \frac{3h\lambda}{3 - \alpha h\lambda}\right)u_n$$

   Si ha assoluta stabilità se e solo se

   $$\left|1 + \frac{3h\lambda}{3 - \alpha h\lambda}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 < \frac{3h\lambda}{3 - \alpha h\lambda} < 0,$$

   essendo $\alpha \geq 0$. La disuguaglianza di destra è verificata $\forall h$ essendo il numeratore negativo e il denominatore positivo ($\lambda < 0$, $\alpha \geq 0$). La disuguaglianza di sinistra si può scrivere in modo equivalente come

   $$-6 + 2\alpha h\lambda < 3h\lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2\alpha - 3)h\lambda < 6 \tag{5}$$

   - Se $2\alpha - 3 \geq 0$ ovvero se $\alpha \geq \frac{3}{2}$ la disuguaglianza è verificata $\forall h$ e quindi il metodo risulta assolutamente incondizionatamente stabile;
   - se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ il metodo è assolutamente stabile per quei valori di h per cui la condizione (5) è verificata.

Esercizio 4

MATLAB