COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

FIRMA ____________

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2015–2016
14 giugno 2016

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcoli

i) l'insieme dei valori di α per cui è possibile applicare il metodo di Thomas;

ii) Per $\alpha = 0$ si trovi la soluzione del sistema (1) con il metodo di fattorizzazione $A = LDL^T$, con L matrice bidiagonale triangolare inferiore avente elementi unitari sulla diagonale principale e D matrice diagonale.

Esercizio 2

Per approssimare l'integrale di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$, si consideri la seguente formula di quadratura

$$I_2(f) = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i), \tag{2}$$

con $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$ e con $w_0 = \frac{5}{9}, \quad w_1 = \frac{16}{9}, \quad w_2 = -\frac{1}{3}$.
Calcolare il grado di esattezza (o precisione) r della formula (2).

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo ad un passo, dipendente da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) f(t_n, u_n) + \frac{\alpha}{3} f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]. \tag{3}$$

Si determini per quali valori di h il metodo (4) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{4}$$

con $\lambda \leq 0$.

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (-3t^2 + 2t - 1)y(t) & t \in (0,1) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Scrivere uno SCRIPT di Matlab che permetta di scegliere il numero N di sottointervalli e

i) calcoli la soluzione approssimata di questo problema di Cauchy usando il metodo di Crank-Nicolson con N sottointervalli;

ii) disegni il grafico della soluzione esatta $y(t) = \exp(-t^3 + t^2 - t)$ e della soluzione approssimata;

iii) calcoli l'errore.