COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2015–2016

05 febbraio 2016

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dovendo risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

1. riscrivere il metodo di Cholesky per matrici simmetriche e definite positive tridiagonali;
2. dopo aver verificato che la matrice data è simmetrica e definita positiva, trovare la soluzione del sistema lineare dato con il metodo dei Cholesky, utilizzano 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di punto fisso

$$x = \Phi(x) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{x^2}{2}} + 1. \tag{1}$$

Verificare che il problema (1) ammette un unico punto fisso $\alpha = \Phi(\alpha)$ nell'ntervallo $[1, 2]$, che le iterazioni di punto fisso associate al problema (1) convergono per ogni scelta di $x_0 \in [1, 2]$ e trovare l'ordine di convergenza (può essere utile sapere che $\Phi''(x) \geq 0, \ \forall x \in [1, 2]$).

Esercizio 3

1. Dimostrare che il metodo di Adams-Bashfort

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}[23f(t_n, u_n) - 16f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, u_{n-2})] \tag{2}$$

   è del terzo ordine.

2. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t)^2 \qquad t > 0 \\ y(0) = -1, \end{cases} \tag{3}$$

   che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{2}{t^2+2}$. Utilizzando il metodo (2) con $h = 0.25$, $u_1 = y(t_1)$ e $u_2 = y(t_2)$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta del problema (3) in $t = 1$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che

1. disegni i grafici delle funzioni $f(x) = e^{1-x^2}$ e $g(x) = x^3 - x - 1$ nell'intervallo $[1, 2]$;
2. approssimi il punto $\mathbf{P} = (\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, g(\alpha))$ di intersezione dei due grafici usando il metodo di Newton;
3. approssimi $I(f) = \int_1^\alpha [f(x) - f(\alpha)]\, dx$ e calcoli $I(g) = \int_\alpha^2 [g(x) - g(\alpha)]\, dx$.