Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2015–2016

20 gennaio 2016

CORREZIONE

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dovendo risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

1. dire, senza fare calcoli, se i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
2. posto $A = M + N + D$ con

$$D = diag(8\ 8\ 8) \qquad N = M^T \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   dire se il metodo iterativo

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -(M+N)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

   converge per ogni $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Risoluzione

1. I metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono essendo la matrice A a dominanza diagonale stretta.
2. Innanzitutto è necessario verificare la consistenza del metodo.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (D + M + N)\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow D\mathbf{x} = -(M+N)\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

   essendo $\det(D) \neq 0$. Quindi il metodo proposto è consistente.
   Per ldimostrare a convergenza abbiamo almeno due modi:

   (a) Il metodo proposto rientra nella famiglia di metodi ottenuti scomponendo $A = P - N$ con $P = D$ e $N = A - D$. È facile verificare (tutti i minori principale delle tre matrici sono strettamente positivi) che A, D e $2D - A$ sono simmetriche e definite positive. Di conseguenza il metodo converge.

   (b) La matrice di iterazione risulta:

$$B = -D^{-1}(M+N) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   con autovalori e raggio spettrale

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4}, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \quad \rho(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} < 1.$$

   Il metodo converge $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad x \in [0,3] \tag{1}$$

1. Si calcoli la cubica a tratti, con due tratti, che interpola la funzione (1) utilizzando nodi equidistanti in $[0,3]$, considerando gli estremi dell'intervallo come primo e ultimo nodo di interpolazione.
2. Con la funzione interpolante trovata, si calcoli un'approssimazione di $f(x)$ in $x = 3/4$ e $x = 1/3$ e l'errore commesso nei due casi.

Risoluzione

1. La funzione discreta da interpolare risulta

x_i	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
y_i	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{5\sqrt{2}}{4}$	-3

I due tratti di cubica $p_3^{(0)}(x)$ e $p_3^{(1)}(x)$ da costruire utilizzano le funzioni discrete definite negli intervalli $[0,3/2]$ e $[3/2,3]$ rispettivamente.

CUBICA $\mathbf{p_3^{(0)}(x)} \quad \mathbf{x \in [0, 3/2]}$

$$\begin{aligned}
p_3^{(0)}(x) &= \sum_{i=0}^{3} y_i \prod_{j=0,j\neq i}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(x-0)(x-1)(x-3/2)}{(1/2-0)(1/2-1)(1/2-3/2)} \\
&+ 1\frac{(x-0)(x-1/2)(x-3/2)}{(1-0)(1-1/2)(1-3/2)} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{(x-0)(x-1/2)(x-1)}{(3/2-0)(3/2-1/2)(3/2-1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}x(x-1)(2x-3) - x(2x-1)(2x-3) + \frac{\sqrt{2}}{2}x(2x-1)(x-1) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}x[(x-1)(2x-3) - \sqrt{2}(2x-1)(2x-3) + (2x-1)(x-1)]
\end{aligned}$$

CUBICA $\mathbf{p_3^{(1)}(x)} \quad \mathbf{x \in [3/2, 3]}$

$$\begin{aligned}
p_3^{(1)}(x) &= \sum_{i=3}^{6} y_i \prod_{j=3,j\neq i}^{6} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{(x-2)(x-5/2)(x-3)}{(3/2-2)(3/2-5/2)(3/2-3)} \\
&- \frac{5\sqrt{2}}{4}\frac{(x-3/2)(x-2)(x-3)}{(5/2-3/2)(5/2-2)(5/2-3)} - 3\frac{(x-3/2)(x-2)(x-5/2)}{(3-3/2)(3-2)(3-5/2)} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)(2x-5)(x-3) + \frac{5\sqrt{2}}{2}(2x-3)(x-2)(x-3) - (2x-3)(x-2)(2x-5) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)[-(2x-5)(x-3) + 5(2x-3)(x-3) - \sqrt{2}(2x-3)(2x-5)]
\end{aligned}$$

2.

x	$p_3^{(i)}$	valore polinomiale	valore funzione	errore
3/4	$p_3^{(0)}$	0.695082521472478	0.692909649383465	0.002172872089013
9/4	$p_3^{(1)}$	-0.873160171779821	-0.861037722821452	0.012122448958370

Esercizio 3

1. Dimostrare che il metodo di Eulero modificato

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + h/2, u_n + K_1/2) \\ u_{n+1} = u_n + K2 \end{cases} \tag{2}$$

è zero-stabile.

2. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > 0 \\ y(0) = -1, \end{cases} \tag{3}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{2}{t^2+2}$. Utilizzando il metodo (2) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 0.5$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. Due modi:

   (a) Nell'ipotesi che la funzione $f(t, y)$ sia lipschitziana rispetto a y, con costante di lipschitzianità L, basta dimostrare che la funzione incremento del metodo di Eulero modificato risulta lipschitziana rispetto a u_n, per ogni h e per ogni t_n.

$$\Phi(t_n, u_n; h, f) = f(t_n + h/2, u_n + hf(t_n, u_n)/2).$$

   Per ogni coppia v_n , w_n si ha:

$$\begin{aligned} |\Phi(t_n, v_n; h, f) - \Phi(t_n, w_n; h, f)| &\leq L|v_n + hf(t_n, v_n)/2 - w_n + hf(t_n, w_n)/2| \\ &\leq L|v_n - w_n| + hL/2|v_n - w_n| \leq (1 + h/2)L|v_n - w_n| \end{aligned}$$

   da cui la tesi, considerando che $h \leq T$, ampiezza dell'intervallo in cui si approssima il problema.

   (b) Essendo il metodo dato di tipo Runge-Kutta, la consistenza implica la 0-stabilità. La consistenza per i metodi di Runge-Kutta si ha se

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$$

   nel nostro caso vera, perché $b_1 = 0$ e $b_2 = 1$.

2. La tabella riporta i risultati che si ottengono:

Table 1: Risultati

t_n	K_1	K_2	u_n	y_n	e_n
0			-1	-1	0
0.25	0.0000E+00	3.1250E-02	-9.6875E-01	-9.6970E-01	9.5000E-04
0.5	5.8655E-02	8.2736E-02	-8.8601E-01	-8.8889E-01	2.8800E-03

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che implementi i metodi di Heun e di Crank-Nicolson per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3(1+t^2)y \quad t \in (0,T) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

chiedendo T e il numero di sottointervalli come input, e che disegni il grafico della soluzione esatta, $y(t) = e^{-3t-t^3}$, e delle due soluzioni approssimate.

Risoluzione

Prima di procedere alla scrittura dello script, è necessario notare che il problema dato è lineare in y e quindi il metodo di Crank-Nicolson :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})] \\ &= u_n + \frac{h}{2}\left[-3(1+t_n^2)u_n - 3(1+t_{n+1}^2)u_{n+1}\right] \end{aligned}$$

può essere riscritto nel modo seguente:

$$u_{n+1} = \frac{2-3(1+t_n^2)}{2+3(1+t_{n+1}^2)}u_n.$$