COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

FIRMA [ ]

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2015–2016

20 gennaio 2016

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dovendo risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

1. dire, senza fare calcoli, se i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.

2. posto $A = M + N + D$ con

$$D = diag(8\ 8\ 8) \qquad N = M^T \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   dire se il metodo iterativo

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -(M+N)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

   converge per ogni $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad x \in [0,3] \tag{1}$$

1. Si calcoli la cubica a tratti, con due tratti, che interpola la funzione (1) utilizzando nodi equidistanti in $[0,3]$, considerando gli estremi dell'intervallo come primo e ultimo nodo di interpolazione.

2. Con la funzione interpolante trovata, si calcoli un'approssimazione di $f(x)$ in $x = 3/4$ e $x = 9/4$ e l'errore commesso nei due casi.

Esercizio 3

Dimostrare che il metodo di Eulero modificato

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + h/2, u_n + K_1/2) \\ u_{n+1} = u_n + K2 \end{cases} \tag{2}$$

è zero-stabile.
Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > 0 \\ y(0) = -1, \end{cases} \tag{3}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{2}{t^2+2}$. Utilizzando il metodo (2) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 0.5$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che implementi i metodi di Heun e di Crank-Nicolson per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &y' = -3(1+t^2)y \quad t \in (0,T) \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$

chiedendo T e il numero di sottointervalli come input, e che disegni il grafico della soluzione esatta, $y(t) = e^{-3t-t^3}$, e delle due soluzioni approssimate.