COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

FIRMA ____________

Analisi Numerica I - V Appello a.a. 2014–2015

2 settembre 2015

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Dire per quali valori del parametro α non esiste la fattorizzazione LU di A e giustificare la risposta.

ii) Calcolare la fattorizzazione LU nel caso in cui $\alpha = 1$.

Esercizio 2

Siano date le funzioni $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 2x - 1$.

i) Dimostrare che i loro grafici si intersecano in un unico punto di ascissa α. Determinare un intervallo a cui α appartiene, specificando il segno di α.

ii) Definire un metodo di punto fisso convergente per il calcolo di α.

iii) Approssimare α con errore stimato minore di 10^{-3}, utilizzando il metodo definito al punto ii). Per il calcolo si utilizzino 5 cifre per la mantissa e si consideri come valore iniziale $x_0 = 1$.

Esercizio 3

Si consideri lil seguente metodo ad un passo

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\left[\frac{3}{4}f(t_n, u_n) + \frac{1}{4}f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

i) Si studi l'ordine del metodo.

ii) Si calcoli la condizione di assoluta stabilità quando si applica il metodo al problema modello

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \qquad \lambda < 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo iterativo per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^0 \text{ assegnato} \\ &\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \theta D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k) \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

essendo D la matrice diagonale con la stessa diagonale di A e θ un parametro di rilassamento.

- La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore termine noto $\mathbf{b}$ e il parametro di rilassamento θ.
- Deve restituire la soluzione approssimata $\mathbf{x}$ e il numero d'iterazioni effettuate `nit`.
- Il metodo iterativo si deve fermare quando il residuo relativo é minore di 10^{-8}, cioè quando

  $$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k\|_2 \leq 10^{-8}\|\mathbf{b}\|_2 \,,$$

  oppure se si superano le 500 iterazioni.