CORREZIONE
Analisi Numerica I - IV Appello a.a. 2014–2015
13 luglio 2015

Esercizio 1

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dire se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.

Risoluzione Osserviamo innnanzitutto che la matrice A è tridiagonale. Di conseguenza i due metodi o sono entrambi convergenti o entrambi divergenti, essendo $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$. La matrice A non presenta nessun'altra proprietà, e quindi per verificare la convergenza è necessario calcolare il raggio spettrale di una delle due matrici di iterazione. Essendo più facili i calcoli, esaminiamo il metodo di Jacobi. La matrice di iterazione del metodo di Jacobi risulta:

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovaloti di B_J sono le radici dell'equazione:

$$\lambda \left(\lambda^2 - \frac{14}{15} \right) = 0,$$

da cui si ricava

$$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{14}{15}} < 1.$$

Quindi entrambi i metodi convergono.

Esercizio 2

Si consideri

$$f(x) = \sin(\pi x) \qquad x \in [-1, 1] \tag{1}$$

i) Si calcoli la parabolica a tratti, con due tratti, che interpola la funzione (1) utilizzando nodi equidistanti in $[-1, 1]$, considerando gli estremi dell'intervallo come primo e ultimo nodo di interpolazione.

ii) Con la parabolica a tratti trovata al punto precedente, si calcoli un'approssimazione di $f(x)$ in $x = -1/6$ e $x = 1/3$ e l'errore commesso nei due casi.

Risoluzione

i) Complessivamente 5 nodi di interpolazione: $x_0 = -1,\ x_1 = -1/2,\ x_2 = 0$ che servono per calcolare il primo tratto di parabolica, $x_2 = 0,\ x_3 = 1/2,\ x_4 = 1$ per il secondo.

Le due funzioni discrete da interpolare sono rispettivamente:

– $(-1, 0),\ (-1/2, -1),\ (0, 0)$ da cui si ricava:

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = (-1)\frac{(x+1)(x-0)}{-1/4} = 4x(x+1) \in \mathbb{P}_2$$

– $(0, 0),\ (1/2, 1),\ (1, 0)$ da cui si ricava:

$$p_2(x) = \sum_{i=2}^{4} y_i \prod_{j=2, j\neq i}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = (+1)\frac{(x-1)(x-0)}{-1/4} = -4x(x-1) \in \mathbb{P}_2$$

La parabolica a tratti cercata è quindi:

$$\Pi_2(x) = \begin{cases} p_1(x) = 4x(x+1) & -1 \leq x \leq 0 \\ p_2(x) = 4x(1-x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ii) Per il calcolo in $x = -1/6$ e $x = 1/3$ devo usare rispettivamente $p_1(x)$ e $p_2(x)$, ottenendo:

$$f(-1/6) \approx p_1(-1/6) = -\frac{4}{6}\left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 0.\bar{5}$$

$$f(1/3) \approx p_2(1/3) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0.\bar{8}.$$

I corrispondenti errori sono:

$$E(-1/6) = |f(-1/6) - p_1(-1/6)| = 0.0\bar{5}$$

$$E(1/3) = |f(1/3) - p_2(1/3)| = 0.022863485...$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = u_n + h[(1-\theta)f(t_n, u_n) + \theta f(t_{n+1}, u_{n+1})].$$

con $0 \leq \theta \leq 1$.
Si studi, al variare del parametro θ, l'assoluta stabilità del metodo, limitando, per semplicità, i calcoli al caso in cui il parametro λ del problema modello sia reale negativo.

Risoluzione
il metodo proposto e il $\theta-$metodo. Applicando tale metodo dato al problema modello si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h[(1-\theta)\lambda u_n + \theta\lambda u_{n+1}],$$

da cui si ricava:

$$u_{n+1} = \frac{1+(1-\theta)\lambda h}{1-\theta\lambda h} u_n = \left(1 + \frac{\lambda h}{1-\theta\lambda h}\right)^{n+1}.$$

La condizione di assoluta stablità diventa:

$$\left|1 + \frac{\lambda h}{1-\theta\lambda h}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 + \frac{\lambda h}{1-\theta\lambda h} < 1.$$

Essendo per ipotesi, $h, \theta \geq 0$ e $\lambda < 0$, la disuguaglianza di destra risulta sempre verificata.
Dalla disuguaglianza di sinistra , essendo $1 - \theta\lambda h > 0$, si ottiene:

$$(1-2\theta)h\lambda < -2$$

da cui si ha:

- se $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$: metodo assolutamente incondizionatamente stabile.
- se $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$: metodo assolutamente stabile sotto la condizione: $h < \frac{2}{(1-2\theta)|\lambda|}$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di matlab che implementi il metodo di Crank-Nicolson per l'approssimazione della soluzione di problemi di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)y(t) \quad t \in (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La funzione deve ricevere in input la funzione g, il dato iniziale y_0, l'istante finale T e il numero di sottointervalli N da usare nella discretizzazione, e restituire due vettori t e u con gli istanti t_i dove e stata calcolata la soluzione approsimata e il correspondente valore della soluzione approssimata u_i.

Risoluzione
Applicando il metodo di Crank-Nicolson al problema da to si ha:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(g_n u_n + g_{n+1}u_{n+1})$$

Esplicitano rispetto a u_{n+1} si ottiene:

$$u_{n+1} = \frac{1 + hg_n/2}{1 - hg_{n+1}/2}.$$

A questo punto il metodo applicato al problema dato scritto modo conveniente per poter essere implementato.