CORREZIONE
Analisi Numerica I - IV Appello a.a. 2014–2015
15 giugno 2015

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{9}{4} \\ -4 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Senza fare calcoli, dire perché alla matrice A è possibile applicare il metodo di fattorizzazione LU senza pivoting.
2. Calcolare la fattorizzazione LU con il metodo di Crout.
3. Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando la fattorizzazione calcolata al punto precedente.

Risoluzione

1. La matrice è fattorizzabile senza usare strategia di pivoting perché è a dominanza diagonale stretta. ERRORE NEL TESTO. Non è possibile risolvere questo punto dell'esercizio senza fare calcoli.
2. Fattorizzazione LU con il metodo di Crout.

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{12} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Si consideri

$$f(x) = \sin(\pi x) \qquad x \in [-1, 1] \tag{1}$$

i) Si calcoli la parabolica a tratti, con due tratti, che interpola la funzione (1) utilizzando nodi equidistanti in $[-1, 1]$, considerando gli estremi dell'intervallo come primo e ultimo nodo di interpolazione.

ii) Con la parabolica a tratti trovata al punto precedente, si calcoli un'approssimazione di $f(x)$ in $x = -1/6$ e $x = 1/3$ e l'errore commesso nei due casi.

Soluzione

i) Complessivamente 5 nodi di interpolazione: $x_0 = -1,\ x_1 = -1/2,\ x_2 = 0$ che servono per calcolare il primo ramo di parabola, $x_2 = 0,\ x_3 = 1/2,\ x_4 = 1$ per il secondo. Con queste notazioni si devono calcolare: $P_{2,1}(x)$ per $x \in [-1, 0]$ e $P_{2,2}(x)$ per $x \in [0, 1]$.

$$P_{2,1}(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{2} l_{2,i}(x) \right) = y_0 \frac{x(x+1/2)}{1/2} + y_1 \frac{x(x+1)}{-1/4} + y_2 \frac{(x+1)(x+1/2)}{1/2}$$

$$P_{2,2}(x) = \sum_{i=2}^{4} y_i \left(\prod_{j=2, j\neq i}^{4} l_{2,i}(x \right)) = y_2 \frac{(x-1/2)(x-1)}{1/2} + y_3 \frac{x(x-1)}{-1/4} + y_3 \frac{x(x-1/2)}{1/2}$$

da cui si ottiene:

$$P_{2,1}(x) = 2(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + (y_0 - 4y_1 + 3y_2)x + y_2$$
$$P_{2,2}(x) = 2(y_2 - 2y_3 + y_4)x^2 - (3y_2 - 4y_3 + y_4)x + y_2$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = u_n + h[(1-\theta)f(t_n, u_n) + \theta f(t_{n+1}, u_{n+1})].$$

con $0 \le \theta \le 1$.
Si studi, al variare del parametro θ, l'assoluta stabilità del metodo, limitando, per semplicità, i calcoli al caso in cui il parametro λ del problema modello sia reale negativo.

Soluzione
Si indichi con $y_k = y(t_k)$ la soluzione esatta calcolata in t_k e di conseguenza con y'_k, y''_k, ... le derivate prima, seconda, ... di $y(t)$ calcolate in t_k. Si ricordi inoltre che, essendo $y(t)$, soluzione esatta, si ha $y'_k = f(t_k, y_k)$.
Calcolo dell'errore di troncamento locale:

$$\begin{aligned}
h\tau_{n+1}(h) &= y_{n+1} - u^*_{n+1} \\
&= [y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n + O(h^4)] - \{y_n + h[(1-\theta)y'_n + \theta y'_{n+1}]\} \\
&= [y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n + O(h^4)] - \{y_n + h[(1-\theta)hy'_n + \theta(y'_n + hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''_n + O(h^3)]\} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right)h^2y''_n + \left(\frac{1}{6} - \frac{\theta}{2}\right)h^3y'''_n + O(h^4)
\end{aligned}$$

Si evince:

- Consistente per ogni valore di θ.
- Ordine p: $p = 1$ per $\theta \neq \frac{1}{2}$, $p = 2$ per $\theta = \frac{1}{2}$.