CORREZIONE
Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2014–2015
5 febbraio 2015

Esercizio 1

Data l'equazione

$$p(x) = acx^2 + (1-a)x = 0, \tag{1}$$

con $a, c > 0$, si consideri il seguente metodo di punto fisso

$$x^{(k+1)} = ax^{(k)}(1 - cx^{(k)}). \tag{2}$$

1. Si studi la convergenza del metodo (2), al variare del parametro $a > 0$ per il calcolo delle radici di (1).
2. Nel caso particolare in cui $a = 2$ di che ordine risulta il metodo?

Risoluzione

1. Le radici di $p(x)$, sono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \frac{a-1}{ac}$.

$$\Phi(x) = ax(1-cx) \qquad \Phi'(x) = a(1-2cx)$$

- $\alpha_1 = 0$.
  Essendo $\Phi'(0) = a$, esiste un intorno di 0 in cui scegliere $x^{(0)}$ per avere convergenza se $|a| < 1$.
- $\alpha_2 = \frac{a-1}{ac}$
  Essendo $\Phi'(\frac{a-1}{ac}) = 2 - a$, esiste un intorno di α_2 in cui scegliere $x^{(0)}$ per avere convergenza se $1 < a < 3$.

2. Se $a = 2$, il metodo non converge alla radice $\alpha_1 = 0$ e converge con ordine due alla radice $\alpha_2 = \frac{a-1}{ac} = \frac{1}{2c}$ in quanto $\Phi'(\alpha_2) = 0$ e $\Phi''(\alpha_2) = -4c \neq 0$.

Esercizio 2

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{4} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Determinare per quali valori di α la matrice risulta definita positiva.
2. Determinare una matrice triangolare inferiore L tale che $A = LL^T$.
3. Nel caso in cui $\alpha = \frac{13}{4}$, si risolva il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & -\dfrac{9}{4} & -\dfrac{11}{2} & \dfrac{13}{2} \end{pmatrix}^T$$

   utilizzando la fattorizzazaione $A = LL^T$.

Risoluzione

1. Un modo semplice per verificare se una matrice simmetrica Aè definita positiva consiste nel verificare che tutti i minori proncipali di A siano positivi. Indico dcon A_i con $i = 1, 2, 3, 4$ i minori principali di A. Si ha

$$A_1 = 4 > 0, \quad A_2 = 4 > 0, \quad A_3 = \frac{85}{4} - 4 - \frac{17}{4} = \frac{26}{2} > 0,$$

$$A_4 = \det(A) = \alpha \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{4} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = 16\alpha - 36 > 0$$

   da cui si ricava che A è definita positiva se $\alpha > \frac{9}{4}$.

2. La fattorizzazione richiesta è la fattorizzazione di Cholesky per matrici tridiagonali simmetriche e definite positive che si scrive nella forma:

$$\begin{aligned} \ell_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} \\ \ell_{i,i-1} &= a_{i,i-1}/\ell_{i,i} \qquad\qquad i = 2, 3, 4. \\ \ell_{i,i} &= \sqrt{a_{i,i} - \ell_{i,i-1}^2} \end{aligned} \tag{3}$$

   Si ricava:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \sqrt{\alpha - \frac{9}{4}} \end{pmatrix}$$

   ben definita se $\alpha > \frac{9}{4}$.

3. Se $\alpha = \frac{13}{4}$, $\ell_{4,4} = 1$.

$$LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{array} \right.$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{y} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{5}{2} & -1 & -3 & 2 \end{array} \right)^T$$

$$\mathbf{x} = \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)^T.$$

Esercizio 3

Si consideri il metodo di Adams-Bashfort a due passi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \tag{4}$$

1. Si determini l'ordine del metodo.
2. Dato il problema modello

$$y' = -10y \quad t > 0 \qquad y(0) = 1. \tag{5}$$

   si calcoli (utilizzando 6 cifre) un'approssimazione di $y(1)$ con il metodo (4), scegliendo $h = 0.2$ e $u_1 = y(h)$, avendo indicato con $y(t)$ la soluzione esatta del problema (5).
   Si motivino (con verifica) i risultati ottenuti.

Risoluzione

1. Si calcoli l'errore di troncamento locale:

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(h) &= \frac{y_{n+1} - u^*_{n+1}}{h} = \\
&= \frac{1}{h}\left\{\left[y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''(\xi)\right] - \left[y_n + \frac{h}{2}3y'_n - \frac{h}{2}\left(y'_n - hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''(\chi)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{h^2}{6}y'''(\xi) + \frac{h^2}{2}y'''(\chi) = O(h^2)
\end{aligned}$$

   da cui si deduce che il metodo è di ordine $p = 2$.

2. La soluzione esatta del problema modello considerato è $y(t) = e^{-10t}$ sempre positiva e tendente a zero quando $t \to +\infty$. Il metodo di Adams-Bashfort applicato al problema modello con $h = 0.2$ diventa:

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1 \\
&u_1 = y(h) = e^{-10h} = e^{-2} = 0.135335 \\
&u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{2}[3(-10u_n) + 10u_{n-1}] = -2u_n + u_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

   Di conseguenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
u_2 &= -2u_1 + u_0 = 0.72933 \\
u_3 &= -2u_2 + u_1 = -1.32335 \\
u_4 &= -2u_3 + u_2 = 3.37603 \\
u_5 &= -2u_4 + u_3 = -8.07541
\end{aligned}$$

   Il metodo risulta assolutamente instabile per il valore di h scelto. Infatti se il metodo fosse assolutamente stabile, i valori della soluzione dovrebbera avere un andamento tendente a zero. Verifichiamo. Il polinomio caratteristico associato al metodo di Adams-Bashfort è:

$$\Pi(h\lambda) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r) = r^2 - r - \frac{h\lambda}{2}(3r - 1) = \frac{1}{2}[2r^2 - (2 + 3h\lambda)r + h\lambda]$$

Per $h = 0.2$ e $\lambda = -10$ si ha $h\lambda = -2$ e quindi:

$$\Pi(-2) = r^2 + 2r - 1$$

le cui radici sono: $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ da cui si ha:

$$|r_1| = 1 - \sqrt{2} < 1 \qquad |r_2| = 1 + \sqrt{2} > 1.$$

Inoltre:

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^2$$

con c_1 e c_2 che dipendono dalle condizioni iniziali. Se $c_2 \neq 0$, la soluzione u_n non può che tendere all'infinito oscillando tra valori positivi e negativi per n che tende all'infinito. Risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2 = 1 \\ u_1 &= c_2 r_2 + c_2 r_2 = y(h) = 0.135335 \end{aligned}$$

si ha effettivamente: $c_1 = 0.901401638848479 \qquad c_2 = 0.098598361151521 \neq 0.$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di MATLAB che implementi la fattorizzazione di Cholesky per una matrice **tridiagonale** simmetrica e definita positiva.