CORREZIONE
Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2014–2015
13 gennaio 2015

Esercizio 1

Si calcoli un'approssimazione di $\cos(\frac{\pi}{5})$ mediante il polinomio interpolatore di Lagrange di grado $n = 3$ costruito a partire a partire dalla seguente funzione discreta

$$(x_i, y_i) = \Big(\frac{\pi}{3}i, \cos(x_i)\Big) \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Si calcoli l'errore commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Risoluzione

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_{3,i}(x) = \sum_{i=0}^{3} \Big[cos(\frac{\pi}{3}i) l_{3,i}(x)\Big]$$

$$l_{3,0}(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{2\pi}{3})(x - \pi)}{(-\frac{\pi}{3})(-\frac{2\pi}{3})(-\pi)} = \frac{(3x - \pi)(3x - 2\pi)(x - \pi)}{-2\pi^3}$$

$$l_{3,1}(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x(x - \frac{2\pi}{3})(x - \pi)}{(\frac{\pi}{3})(-\frac{\pi}{3})(-\frac{2\pi}{3})} = \frac{9x(3x - 2\pi)(x - \pi)}{2\pi^3}$$

$$l_{3,2}(x) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x(x - \frac{\pi}{3})(x - \pi)}{(\frac{2\pi}{3})(\frac{\pi}{3})(-\frac{\pi}{3})} = \frac{9x(3x - \pi)(x - \pi)}{-2\pi^3}$$

$$l_{3,3}(x) = \prod_{j=0, j\neq 3}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{2\pi}{3})}{\pi\frac{2\pi}{3}\frac{\pi}{3}} = \frac{x(3x - \pi)(3x - 2\pi)}{2\pi^3}$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1\frac{(3x - \pi)(3x - 2\pi)(x - \pi)}{-2\pi^3} + \frac{1}{2}\frac{9x(3x - 2\pi)(x - \pi)}{2\pi^3} \\ &- \frac{1}{2}\frac{9x(3x - \pi)(x - \pi)}{-2\pi^3} - 1\frac{x(3x - \pi)(3x - 2\pi)}{2\pi^3} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} P_3(\pi 5) &= 1\frac{(\frac{3}{5} - 1)(\frac{3}{5} - 2)(\frac{1}{5} - 1)}{-2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{9}{5}(\frac{3}{5} - 2)(\frac{1}{5} - 1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{\frac{9}{5}(\frac{3}{5} - 1)(\frac{1}{5} - 1)}{-2} - 1\frac{\frac{1}{5}(\frac{3}{5} - 1)(\frac{3}{5} - 2)}{2} \\ &= \frac{28}{125} + \frac{63}{125} + \frac{18}{125} - \frac{7}{125} = \frac{102}{125} = 0.816 \end{aligned} \tag{3}$$

Valutiamo ora l'errore:

$$|err| = |\cos(\frac{\pi}{5}) - P_3(\frac{\pi}{5})| = |0.80902 - 0.816| = 0.00698 = 6.98 \cdot 10^{-3}.$$

Eseguendo tutti i calcoli per il calcolo dei coefficienti di $P_3(x)$ si ottiene:

$$P_3(x) = \frac{9}{2\pi^3}x^3 - \frac{27}{4\pi^2}x^2 + \frac{1}{4\pi}x + 1$$

Esercizio 2

Si consideri la seguente famiglia di metodi a un passo, dipendenti da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(\alpha f_{n+1} + \alpha^2 f_n\right) \tag{4}$$

Si studi, al variare di α, consistenza e assoluta a stabilità di (4).

Risoluzione
Essendo il metodo assegnato un metodo ad un passo lineare, posso applicare tanto la teoria dei metodi ad un passo quanto quella dei metodi multistep lineari con $p = 0$.

<u>Metodi multistep.</u>

1. Consistenza.

   Per studiarne la consistenza basta verificare quando

   $$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 \qquad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1.$$

   Nel nostro caso:

   $$p = 0; \qquad a_0 = 1; \quad b_{-1} = \frac{\alpha}{2}, \quad b_0 = \frac{\alpha^2}{2}$$

   da cui si ricava:

   $$\sum_{j=0}^{0} a_j = 1 \qquad -\sum_{j=0}^{0} j a_j + \sum_{j=-1}^{0} b_j = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + \alpha - 2 = 0.$$

   Quindi si ha consistenza solo per

   $$\alpha = 1: \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n): \ \text{Metodo dei trapezi} \tag{5}$$
   $$\alpha = -2: \qquad u_{n+1} = u_n + h(-f_{n+1} + 2f_n) \tag{6}$$

2. Assoluta stabilità.

   - $\alpha = 1$ il metodo ottenuto è il metodo dei trapezi incondizionatamente assolutamente stabile
   - $\alpha = -2$ Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico:

     $$\Pi(h\lambda) = r - 1 - h\lambda(-r + 2) = (1 + h\lambda)r - (1 + 2h\lambda) = 0$$

     $$r = \frac{(1 + 2h\lambda)}{(1 + h\lambda)},$$

     da cui si ricava

     $$|r| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad h < -\frac{2Re(\lambda)}{3|\lambda|^2}$$

<u>Metodi ad un passo.</u>

1. Consistenza. Calcolo $h\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - u^*_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u^*_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[\alpha f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \alpha^2 f(t_n, y_n)] = y_n + \frac{h}{2}[\alpha y'_{n+1} + \alpha^2 y'_n] \\ &= y_n + \frac{h}{2}[\alpha(y'_n + hy''(\xi_{n+1})) + \alpha^2 y'_n] \\ &= y_n + h\frac{\alpha + \alpha^2}{2} y'_n + h^2 \frac{\alpha}{2} y''(\xi_{n+1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Per avere consistenza deve essere che il coefficiente di hy'_n sia uguale a 1 cioè

$$\frac{\alpha + \alpha^2}{2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ e } \ \alpha = -2.$$

2. Assoluta stabilità per $\alpha = -2$ ($\alpha = 0$: metodo dei trapezi). Applicando il metodo al problema modello, si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h(-\lambda u_{n+1} + 2\lambda u_n) \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = \frac{(1 + 2h\lambda)}{(1 + h\lambda)} u_n$$

e quindi come sopra.

Esercizio 3

Per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

si consideri il metodo iterativo seguente:

$$\begin{aligned} &\text{assegnato } \mathbf{x}^{(0)} \\ &P_\alpha \mathbf{x}^{(k+1)} = N_\beta \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad k \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_\beta = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

1. Trovare i valori di $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ per cui il metodo iterativo (9) è consistente.
2. Per $\alpha = 2$, dire se il metodo iterativo (9) converge.

Risoluzione

1. Il metodo risulta consistente se $detP \neq 0$ e $A = P_\alpha - N_\beta$. Per cui si ricava $\alpha \neq 0$ e $\beta = 2 - \alpha$.
2. Per $\alpha = 2$ risulta $\beta = 0$. La matrice di iterazione $B = P_2^{-1} N_0$ deve avere tutti gli autovalori in modulo minori di 1.

$$B = P_2^{-1} N_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

   Gli autovalori di B sono gli zeri del polinomio: $\lambda(2\lambda^2 + \lambda + 1)$, cioè

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \qquad \text{con } |\lambda_{2,3}|^2 = \frac{1+7}{16} = \frac{1}{2} < 1.$$

   Quindi il metodo interativo (9) converge.