COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

FIRMA [ ]

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2014–2015

13 gennaio 2015

Esercizio 1

Si calcoli un'approssimazione di $\cos(\frac{\pi}{5})$ mediante il polinomio interpolatore di Lagrange di grado $n = 3$ costruito a partire a partire dalla seguente funzione discreta

$$(x_i, y_i) = \left(\frac{\pi}{3} i, \cos(x_i)\right) \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Si calcoli l'errore commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Esercizio 2

Si consideri la seguente famiglia di metodi a un passo, dipendenti da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_0 = y_0; \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(\alpha f_{n+1} + \alpha^2 f_n\right) \quad n \geq 0 \tag{2}$$

per l'approssimazione della soluzione del problema di Cauchy

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Si studino, al variare di α, consistenza e assoluta stabilità di (**??**).

Esercizio 3

Per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

si consideri il metodo iterativo seguente:

$$\begin{aligned} &\text{assegnato } \ \mathbf{x}^{(0)} \\ &P_\alpha \mathbf{x}^{(k+1)} = N_\beta \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad k \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_\beta = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

1. Trovare i valori di $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ per cui il metodo iterativo (**??**) è consistente.
2. Per $\alpha = 2$, dire se il metodo iterativo (**??**) converge.

Esercizio 4

Scrivere un funzione di Matlab che implementi il seguente metodo per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy:

$$\begin{aligned}
&u_0 = y(t_0) \\
&\text{per } n \geq 0 \\
&\quad u^*_{n+1} = u_n + h\, f_n \\
&\quad u_{n+1} = u_n + h\left[-f^*_{n+1} + 2 f_n\right] ,
\end{aligned}$$

dove $f_n = f(t_n, u_n)$ e $f^*_{n+1} = f(t_{n+1}, u^*_{n+1})$.