Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2013-2014

10 settembre 2014

CORREZIONE

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 3 & 1+\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcolino

i) l'insieme dei valori di α per cui il metodo di Jacobi converge;

ii) le prime tre iterazioni del metodo di Jacobi per $\alpha = 0$ a partire dal vettore inizialie $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$. Si utilizzino 4 cifre per i calcoli.

Svolgimento

i) Per trovare l'insieme dei valori di α per cui il metodo di Jacobi converge si devono trovare i valori di α per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi è minore di uno, cioè:

$$\rho(B_J) = \rho(I - D^{-1}A) < 1$$

Ora

$$I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ -\alpha^2/3 & 0 & -(1+\alpha^2)/3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di B_J sono le radici del polinomio:

$$\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1+2\alpha^2}{9}\right)$$

da cui si ricava che

$$\rho(B_J) < 1 \Longleftrightarrow \frac{1+2\alpha^2}{<}1 \Longleftrightarrow -2 < \alpha < 2.$$

ii) Si richiede di applicare il metodo di Jacobi al sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ovvero di calcolare la successione

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

assumendo come vettore iniziale il vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ e utilizzando 4 cifre per il calcolo. I primi tre termini della successione sono:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -.3333 \\ 0 & -.3333 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -.3333 \\ 2.333 \\ 1.667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.3333 \\ 2.333 \\ 1.667 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -.3333 \\ 0 & -.3333 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -.3333 \\ 2.333 \\ 1.667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -.3333 \\ 2.333 \\ 1.667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.111 \\ 1.777 \\ .8894 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -.3333 \\ 0 & -.3333 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(2)} + \begin{pmatrix} -.3333 \\ 2.333 \\ 1.667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.9246 \\ 2.037 \\ 1.076 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Approssimare con il metodo di Cavalieri-Simpson composito l'integrale

$$I = \int_1^5 \ln x \, dx$$

in modo che l'errore risulti minore di 10^{-1}. Calcolare poi l'errore effettivamente commesso. Si utilizzino 7 cifre per i calcoli.

Svolgimento Rispetto alle notazioni utilizzate, si indica con $n+1$ il numero totale di punti utilizzati che si indicano con x_i per $i = 0, \ldots, n$. Due punti consecutivi distano tra di loro h. $m = \frac{n}{2}$ indica il numero di sottointervalli adiacenti in cui si applica la formula di Cavalieri Simpson semplice. L'ampiezza di tali intervalli è $H = 2h$. Fatte queste precisazioni, la formula dell'errore che si utilizza è la seguente:

$$|E| \leq \frac{b-a}{180} h^5 \max_{[a,b]} |f^{IV}| \leq 10^{-1}$$

essendo a e b gli estremi dell'intervallo di integrazione e f la funzione integranda. Nell'esercizio assegnato, $f^{IV}(x) = -6x^{-4}$ e $\max_{[a,b]} |f^{IV}| = |f^{IV}(1)| = 6$ e $b - a = 4$. Ricordando che $h = \frac{b-a}{n}$, dalla relazione precedente si ricava:

$$n \geq (b-a) \sqrt[4]{\frac{(b-a) \max_{[a,b]} |f^{IV}|}{180 \cdot 10^{-1}}} = 4 \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 6}{18}} = 4.29\ldots$$

da cui, dovendo n essere pari, si ricava $n = 6$.
Seconda parte dell'esercizio. I nodi di integrazione risultano essere: $x_i = 1 + \frac{2}{3} i$, con $i = 0, \ldots, 6$, essendo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{3}$. La formula di Cavalieri-Simpson può essere scritta nel modo seguente:

$$I_{CS} = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right].$$

Il valore approssimato dell'integrale sarà:

$$\begin{aligned}
I_{CS} &= \frac{2}{9}\left\{ln(1) + 4[\ln(1.666667) + \ln(3) + \ln(4.333333)] \;\; + 2[\ln(2.333333) + \ln(3.666667)] + \ln(5)\right\} \\
&= \frac{2}{9}\left[0 + 4(0.5108256 + 1.098612 + 1.466337) + 2(0.8472979 + 1.299283) + 1.609438\right] \\
&= \frac{2}{9}\left[0 + 4 \cdot 3.075775 + 2 \cdot 2.146581 + 1.609438\right] = \frac{1}{9}\; 18.2057 = 4.045711
\end{aligned}$$

L'integrale esatto è:

$$I = \int_1^5 \ln x \, dx = \; x(\ln x - 1)|_1^5 = 4.04719$$

e di conseguenza l'errore effettivo sarà:

$$|I - I_{CS}| = 0.001478 = 1.478 \cdot 10^{-3} < 10^{-1}.$$

Esercizio 3

Si consideri la seguente famiglia di metodi ad un passo, dipendenti da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) f(t_n, u_n) + \frac{\alpha}{2} f(t_{n+1}, u_{n+1})\right].$$

Si trovino i valori di h per i quali la famiglia data è assolutamente stabile se applicata al problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
&y'(x) = -10y(x), \qquad x > 0 \\
&y(0) = 1.
\end{aligned}$$

Svolgimento Il problema di Cauchy assegnato è il problema modello con $\lambda = -10$. Lo studio dell'assoluta stabilità è quindi lo studio classico di tale prorpietà.
Applicando il metodo assegnato al problema modello si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(-10u_n) + \frac{\alpha}{2}(-10u_{n+1})\right].$$

da cui si ricava

$$(2 + 10h\alpha)u_{n+1} = [2 - 10h(2 - \alpha)]u_n$$

ovvero

$$u_{n+1} = \frac{1 - 5h(2 - \alpha)}{1 + 5h\alpha} u_n = \left(1 - \frac{10h}{1 + 5h\alpha}\right) u_n,$$

da cui si ricava che il metodo è assolutamente stabile se e solo se

$$-1 < 1 - \frac{10h}{1 + 5h\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{5h}{1 + 5h\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 1 + 5h\alpha > 5h \Longleftrightarrow 5h(1 - \alpha) < 1.$$

Se $1 - \alpha \leq 0 \Longleftrightarrow \alpha \geq 1$ il metodo è assolutamente incondizionatamente stabile.
Se $1 - \alpha > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 1$, il metodo è assolutamente stabile se e sole se $h < \frac{1}{5(1-\alpha)}$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo del gradiente per la approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\
&\text{for } k \geq 0 \\
&\quad \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \\
&\quad \alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(k)})}{[\mathbf{r}^{(k)}]^T A \mathbf{r}^{(k)}} \\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}\,.
\end{aligned}
$$

Usare un test d'arresto basato sul residuo.