COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2013–2014

10 settembre 2014

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 3 & 1+\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcoli

i) l'insieme dei valori di α per cui il metodo di Jacobi converge;

ii) le prime tre iterazioni del metodo di Jacobi per $\alpha = 0$ a partire dal vettore inizialie $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$. Si utilizzino 4 cifre per i calcoli.

Esercizio 2

Approssimare con il metodo di Cavalieri-Simpson composito l'integrale

$$I = \int_1^5 \ln x \, dx$$

in modo che l'errore risulti minore di 10^{-1}. Calcolare poi l'errore effettivamente commesso. Si utilizzino 7 cifre per i calcoli.

Esercizio 3

Si consideri la seguente famiglia di metodi ad un passo, dipendenti da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) f(t_n, u_n) + \frac{\alpha}{2} f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right].$$

Si trovino i valori di h per i quali la famiglia data è assolutamente stabile se applicata al problema di Cauchy

$$\begin{aligned} & y'(x) = -10y(x), \qquad x > 0 \\ & y(0) = 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo del gradiente per la approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\
&\text{for } k \geq 0 \\
&\quad \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \\
&\quad \alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(k)})}{[\mathbf{r}^{(k)}]^T A\mathbf{r}^{(k)}} \\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} \,.
\end{aligned}
$$

Usare un test d'arresto basato sul residuo.