CORREZIONE
Analisi Numerica I - Quarto appello a.a. 2013–2014
18 luglio 2014

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1+\beta \\ 1-\gamma \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, senza pivoting,

i) dire per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una e una sola soluzione;

ii) calcolare, quando sia possibile, $A^{(3)}$, $\mathbf{b}^{(3)}$ e il vettore soluzione $\mathbf{x}$.

Soluzione

Posto $A^{(1)} = A$ e $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}$, essendo $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ per ogni $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, applico il primo passo del metodo di Gauss e ottengo:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha\beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1-\alpha\beta \\ 1-\gamma \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Essendo $a_{22}^{(2)} = 1 \neq 0$ per ogni $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, applico il secondo passo del metodo e ottengo:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & 1+\alpha\beta\gamma \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1-\alpha\beta \\ 1+\alpha\beta\gamma \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La matrice $A^{(3)}$, e conseguentemente la matrice di partenza A, ha determinante non nullo se e solo se

$$\alpha\beta\gamma \neq -1.$$

Sotto questa condizione, la soluzione del sistema dato è il vettore $\mathbf{x} = (1\ \ -1\ \ 1)^T$.

Esercizio 2

Calcolare con il metodo dei trapezi composito l'integrale seguente

$$I = \int_0^1 2xe^{x^2} dx$$

suddividendo l'intervallo $[0, 1]$ in $n = 4$ parti uguali. Stimare l'errore commesso, usando almeno 5 cifre decimali per i calcoli.

Soluzione

Calcolo integrale approssimato.

Essendo $n = 4$, si ha $h = 0.25$. Ricordando la formula dei trapezi si ha:

$$\begin{aligned} I_T &= h[0.5(f(x_0) + f(x_4)) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \\ &= 0.25[0.5(0 + 2e) + 0.5e^{0.25^2} + e^{0.5^2} + 1.5e^{0.75^2}] \\ &= 0.25[0.5 \cdot 5.4366 + 0.5 \cdot 1.0645 + 1.2840 + 1.5 \cdot 1.7551] \\ &= 0.25[2.7168 + 0.53225 + 1.2840 + 2.6327 = 0.5 \cdot 7.1658] = 1.7915 \end{aligned} \tag{4}$$

Stima errore:

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{[0,1]} |f''(x)| = 0.0052083 \max_{[0,1]} |f''(x)|$$

derivate: $f(x) = 2xe^{x^2}$, $f'(x) = 2(1 + 2x^2)e^{x^2}$ $f''(x) = 4x(3 + 2x^2)e^{x^2}$ Senza calcolare la derivata terza, si può facilmente dedurre che sarà il prodotto di un polinomio a coefficienti positivi per la funzione $e^{x^2} > 0$ e quindi, essendo il dominio l'intervallo $[0, 1]$ si avrà che $f'''(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo. Di conseguenza la derivata seconda, che è una funzione non negativa, sarà anche crescente e quindi il valore massimo sarà $f''(1) = 20e$. Da cui, sostituendo nell'espressione della stima si ha:

$$|E| \leq 0.0052083 \cdot 20e = 0.28315$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = (2-\alpha)u_n + (\alpha-1)u_{n-1} + h[(\alpha^2-\alpha+1)f(t_n,u_n) + (\alpha-1)f(t_{n-1},u_{n-1})].$$

Si studi, al variare del parametro α, l'ordine di consistenza si individui quello di ordine massimo.

Soluzione

Il metodo proposto è un metodo multistep con

$$p = 1, \quad a_0 = 2-\alpha, \quad a_1 = \alpha - 1, \quad b_0 = \alpha^2 - \alpha + 1, \quad b_1 = \alpha - 1.$$

1. Consistenza. Metodo consistente se e solo se $a_0 + a_1 = 1$ e $-a_1 + b_0 + b_1 = 1$.
   Con i dati asseganti
   $$a_0 + a_1 = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$
   $$-a_1 + b_0 + b_1 = (1-\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1) + (\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha + 1 = 1$$
   da cui si ricava che il metodo risulta consistente per
   $$\alpha = 0 \quad \alpha = 1$$

2. Ordine. $\alpha = 1$. Il metodo risultante è il metodo di Eulero che sappiamo essere di ordine 1.
   Per $\alpha = 0$ il metodo è
   $$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + h[f(t_n,u_n) - f(t_{n-1},u_{n-1})].$$
   Per studiare l'ordine, calcolo l'errore di troncamento locale e studio con quale potenza di h tende a 0, per $h \to 0$.
   $$h\tau(h)_{n+1} = y_{n+1} - u^*_{n+1}$$
   $$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3) - u^*_{n+1}$$
   $$\begin{aligned} u^*_{n+1} &= 2y_n - y_{n-1} + h[f(t_n,y_n) - f(t_{n-1},y_{n-1})] \\ &= 2y_n - [y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3)] + h[y'_n - (y'_n - hy''_n\frac{h^2}{2}y'''_n + O(h^3)] \end{aligned}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi per $\alpha = 0$ lo schema numerico per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

studiato nell'esercizio 3, cioè:

$$u_0 = y_0$$

$u_1,$ calcolato con un metodo ad un passo

Per $n \geq 1$

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + h\left[f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right].$$