CORREZIONE
Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2013–2014
20 giugno 2014

Esercizio 1

Sia $A = I - B$ matrice dei coefficienti del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Dimostrare che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati alla matrice A o convergono entrambi o entrambi divergono.

ii) Nell'eventualità che convergano, dimostrare che il metodo di Gauss-Seidel converge tre volte pi ù velocemente del metodo di Jacobi.

Soluzione

i)
- Metodo di Jacobi. Matrice di iterazione: $B_J = B$ con tre autovalori coincidenti $\lambda(B_J) = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$. Risulta convergente se e solo se $\rho(B_J) = \sqrt[3]{|\alpha\beta\gamma|} < 1$ e quindi se e solo se $|\alpha\beta\gamma| < 1$.
- Metodo di Gauss-Seidel. Matrice di iterazione

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta\gamma \end{pmatrix}$$

  con tre autovalori coincidenti $\lambda(B_J) = \alpha\beta\gamma$. Risulta convergente se e solo se $\rho(B_{GS}) = |\alpha\beta\gamma| < 1$.

Di conseguenza i due metodi convergono sotto la stessa condizione sui parametri α, β, γ.

ii) Per i valori di α, β, γ per cui si ha convergenza, essendo $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^3$, il metodo di Gauss-Seidel converge con velocità tripla rispetto al metodo di Jacobi.

Esercizio 2

Sia dato il seguente problema di punto fisso

$$x = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$$

1. Manipolando l'espressione data, si calcolino i punti fissi.
2. Si studino ordine e convergenza del metodo iterativo associato per ciascuno dei punti fissi.

Soluzione

1. Manipolando l'espressione data si ha che

   $$x = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2x(x^2-1)}{3x^2+1} = 0$$

   per cui i punti fissi sono: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$.

2. considerato che valgono le ipotesi del teorema del punto fisso, controlliamo quanto vale la derivata prima di $|Phi(x) = \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$ nei tre punti fissi. si ha: $\Phi'(x) = 3\frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$ e quindi

   $$\Phi'(0) = 3 > 1, \quad \Phi'(\pm 1) = 0$$

   da cui si deduce che non rsiste un intorno di convergenza per $\alpha_2 = 0$, mentre esiste sia per α_1 che per α_2. In questi punti l'ordine di convergenza è almeno 2. Si calcola la derivata seconda di $\Phi(x)$ che risulta essere

   $$\Phi''(x) = 48(x^2-1)\frac{x}{(3x^2+1)^3}$$

   Quindi il metodo è almeno di ordine 3 per entrambi i punti fissi. Si calcola

   $$\Phi'''(x) = 48(x^2-1)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(3x^2+1)^3}\right) + \frac{96x^2}{(3x^2+1)^3}$$

   Essendo $\Phi'''(\pm 1) \neq 0$ il metodo risulta di ordine 3 per entrambi i punti fissi.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n) + \frac{h\alpha}{2}[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - 3f(t_n, u_n)].$$

Si studino, al variare del parametro α, consistenza e 0-stabilità.

Soluzione

Il metodo proposto è un metodo multistep con

$$p = 1, \quad a_0 = \alpha, \quad a_1 = 1-\alpha, \quad b_0 = 2 - \frac{3}{2}\alpha, \quad b_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

1. Consistenza. Metodo consistente se e solo se $a_0 + a_1 = 1$ e $-a_1 + b_0 + b_1 = 1$. Con i dati asseganti entrambe le uguaglianza sono vere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e quindi il metodo risulta consistente senza nessuna condizione su α.

2. 0-stabilità. Metodo 0-stabile se e solo se è verificata la condizione delle radici. Si considera il polinomio $\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - \alpha r - (1-\alpha)$, che ammette le due radici

$$r_0 = 1 \qquad r_1 = \alpha - 1.$$

   Condizione delle radici soddisfatta se $|r_1| \leq 1$ ma $r_1 \neq 1$. Quindi: $-1 \leq \alpha - 1 < 1$ da cui si ricava che il metodo è 0-stabile se e solo se $0 \leq \alpha < 2$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Adams-Bashforth a due passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Metodo di Adams-Bashforth a due passi:

$$\begin{aligned} & u_0 = y_0 \\ & u_1, \text{ calcolato con un metodo ad un passo} \\ & \text{Per } n \geq 1 \\ & \qquad u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{2}[3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})] \,. \end{aligned}$$