CORREZIONE
Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2013–2014
07 febbraio 2014

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 28 \\ 11 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

i) Si risolva il sistema (1) con il metodo di eliminazione di Gauss, utilizzando il pivoting per righe (ad ogni passo si cerchi come pivot l'elemento d modulo massimo)

ii) Utilizzando le quantità calcolate al punto i), si scriva la matrice P, una fattorizzazione LU di PA e si calcoli il determinante di A.

iii) (A scelta) Si implementi una funzione MATLAB per il calcolo dell'inversa utilizzando il comando *lu* e senza usare il comando *inv*.

Soluzione

i) L'elemento di modulo massimo è $a_{21} = 4$. Quindi scambio la prima riga con la seconda. Pongo $A^{(1)} = PA$, $\mathbf{b}^{(1)} = P\mathbf{b}$ e ottengo

$$(A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 4 & 10 & 24 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

$$m_{21} = m_{31} = \frac{1}{2} \qquad (A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Non necessita ulteriore scambio di riga e quindi calcolo terzo passo:

$$m_{32} = -\frac{1}{5} \qquad (A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Da cui si ricava $x = (3\ 2\ 1)^T$.

ii) Dal punto precedente si ha:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(PA) = \det(LU) = u_{11}u_{22}u_{33} = 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot (-1) = -10$ da cui si ricava $\det(A) = 10$.

Esercizio 2

Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{cos(x)}{25} dx. \tag{2}$$

i) Si valuti il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore minore di 510^{-3} utilizzando la formula composita di Cavalieri-Simpson. Si valuti quindi l'errore assoluto effettivamente commesso.

ii) (A scelta) Si scriva uno script di MATLAB per approssimare I(f) integrando il polinomio interpolatore costruito sui nodi utilizzati al punto precedente. (Si usino i comandi di MATLAB relativi ai polinomi).

Soluzione

i) Sappiamo che la stima dell'errore commesso per approssimare $int_a^b f(x)dx$ risulta

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{[a,b]} |f^{iv}|.$$

e quindi, essendo $h = \frac{b-a}{n}$, imponendo che il secondo membro della stima sia minore di 10^{-3}, si ha

$$n \geq \left(\frac{10^3 (b-a)^5}{180} \max_{[a,b]} |f^{iv}| \right)^{\frac{1}{4}}$$

Sostituendo i dati dell'esercizio si ha: $b - a = \pi$, $\max_{[a,b]} |f^{iv}| = \frac{1}{25}$, $h = \frac{\pi}{n}$ da cui si ricava

$$n \geq \left(\frac{10^3 \pi^5}{180} \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} = 2,871666...$$

da cui, dovendo essere n pari, si ricava $n = 4$ e quindi $h = \frac{\pi}{4}$.
Il valore approssimato dell'integrale è dato da

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{h}{3} \left\{ \frac{1}{25} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\cos(\pi) + 4\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{12 \cdot 25} (-4\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}) = -0.08018239019938 \end{aligned}$$

e quindi osservando che $I(f) = -\frac{2}{25} = -0.08$ si ha che $|E| = |I(f) - I_{CS}| = 0.00018239019938 < 0.001$.

Esercizio 3

Si consideri la seguente famiglia di metodi ad un passo, dipendenti da un parametro α,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) f(t_n,u_n) + \frac{\alpha}{2} f(t_{n+1},u_{n+1})\right] \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

i) Se ne studi la consistenza al variare del parametro α.

ii) Si trovi per quali valori di α il metodo ha ordine massimo e si indichi l'ordine.

iii) Per $\alpha \geq 0$ si indichino le condizioni per avere l'assoluta stabilità quando si applica il metodo al problema modello

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \qquad \lambda > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

iv) (A scelta) Scrivere una funzione MATLAB per l'implementazione del metodo (3) per il problema modello (4) utilizzando le formule ricavate nello svolgimento dell'esercizio (α e λ parametri variabili).

Soluzione

i) Si ricordi che un metodo si dice consistente se l'errore di troncamento locale $\tau_{n+1}(h)$ tende a zero al tendere di h a zero ed è di ordine p se va a zero come h^p.

Per calcolare $\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1}-u^*_{n+1}}{h}$ si indichi con y_k, y'_k, y''_k e y'''_k i valori della soluzione analitica del problema di Cauchy e delle sue derivate fino all'ordine 3 e si ricordi che $y'_k = f(t_k,y_k)$ per ogni indice k. Utilizzando gli sviluppi di Taylor e la definizione di u^*_{n+1}, si ha

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + O(h^4) \\ u^*_{n+1} &= y_n + h\left\{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)y'_n + \frac{\alpha}{2}\left[y'_n + hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''n + O(h^3)\right]\right\} \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h}{2}(1-\alpha)y''_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)y'''_n + O(h^3)$$

e quindi il metodo è consistente $\forall\alpha$ reale

ii) l'ordine massimo del metodo è $p = 2$ che si ha per $\alpha = 1$ (Metodo di Crank-Nicolson).

iii) Assoluta stabilità del problema modello per $\alpha \geq 0$. Sostituendo l'espressione di $f(t, y) = -\lambda y$ in (3) si ha:

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(-\lambda u_n) + \frac{\alpha}{2}(-\lambda u_{n+1})\right]$$

da cui si ricava

$$\frac{2 + \alpha h\lambda}{2} u_{n+1} = \frac{2 + \alpha h\lambda - 2h\lambda}{2} u_n$$

e quindi

$$u_{n+1} = \frac{2 + \alpha h\lambda - 2h\lambda}{2 + \alpha h\lambda} u_n = \left(\frac{2 + \alpha h\lambda - 2h\lambda}{2 + \alpha h\lambda}\right)^{n+1} u_0$$

Si ha assoluta stabilità se e solo se

$$\left|\frac{2 + \alpha h\lambda - 2h\lambda}{2 + \alpha h\lambda}\right| < 1 \quad \text{sse} \quad -1 < \frac{2 + \alpha h\lambda - 2h\lambda}{2 + \alpha h\lambda} < 1$$

La disuguaglianza di destra è sempre verificata. Dalla disuguaglianza di sinistra si ricava

$$h\lambda(1 - \alpha) < 2.$$

Da cui

se $\alpha \geq 1$ il metodo risulta incondizionatamente stabile,
se $0 \leq \alpha < 1$ si ha la condizione di stabilità $h\lambda < \frac{2}{1-\alpha}$.