CORREZIONE
Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2013–2014
20 gennaio 2014

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il seguente metodo iterativo

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato}\\&\text{per } k \geq 0\\&\qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega C\mathbf{r}^{(k)}\end{aligned}$$

essendo C una matrice assegnata e $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$.

i) Si studi la consistenza del metodo.

ii) Si discuta la convergenza del metodo in funzione di ω e degli autovalori della matrice CA. Se CA ammette autovalori aventi segno discorde, esistono valori di ω per cui il metodo risulta convergente?

iii) (A scelta) Si scriva una function MATLAB per l'implementazione del metodo. Si prevedano come dati in input i dati del sistema, la matrice C, il parametro ω, il numero massimo di iterazioni, la tolleranza ε per il test d'arresto. Come dati in output, il vettore soluzione (se calcolato), il numero di iterazioni effettuate. Si implementi il test d'arresto $\|r^k\|_2 \leq \varepsilon$.

Svolgimento

i) Metodo consistente nel caso seguente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \omega C(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \neq 0 \text{ e } \det(C) \neq 0$$

ii) Metodo convergente se e solo se il raggio spttrale della matrice di iterazione risluta minore di 1, i.e.

$$\rho(B_\omega) = \rho(I - \omega CA) < 1.$$

Indicato con $\lambda_i(CA)$ e con $\lambda_i(B_\omega)$ rispettivamente l'i-mo aultovalore di CA e di B_ω, si ha

$$\lambda_i(B_\omega) = 1 - \omega\lambda_i(CA).$$

Imponendo la condizione di convergenza si ha:

$$2\omega Re(\lambda_i(CA)) > \omega^2|\lambda_i(CA)|^2.$$

Supponendo (soluzione accettata) $\lambda_i(CA) \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$0 < \omega\lambda_i(CA) < 2.$$

Da entrambe le condizioni trovate si deduce che ω e $Re(\lambda_i(CA))$ o $\lambda_i(CA)$ devono essere concordi in segno e quindi, al variare di i, le parti reali degli autovalori di CA devono svere tutte lo stesso segno per avere convergenza.

Esercizio 2

Siano date le funzioni $f_1(x) = \cos(x)$ e $f_2(x) = 3x - 1$.

i) Dimostrare che i loro grafici si intersecano in un unico punto di ascissa α. Determinare un intervallo a cui α appartiene, specificando il segno di α.

ii) Definire un metodo di punto fisso convergente per il calcolo di α.

iii) Approssimare α con errore stimato minore di 10^{-3}, utilizzando il metodo definito al punto ii). Per il calcolo si utilizzino 5 cifre per la mantissa e si consideri come valore iniziale $x_0 = 0$.

iv) (A scelta) Si scriva una funziona di MATLAB per l'implementazione del metodo definito al punto ii).

Svolgimento

i) Si consideri $f(x) = cos(x) - (3x - 1)$. GLi zeri di $f(x)$ o punti di intersezione di $f_1(x)$ o $f_2(x)$, si trovano nell'insieme definito nel modo seguente:

$$-1 \leq 3x - 1 \leq 1 \text{ Condizione necessaria è che anche } 3x - 1 \in [-1 : 1]$$
$$\cos(x)(3x - 1) > 0 \text{ Condizione necessaria perché siano uguali è che siano concordi in segno}$$

da cui si ricava $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.
Ora $f(\frac{1}{3}) = cos(\frac{1}{3}) > 0$ mentre $f(\frac{2}{3}) = cos(\frac{2}{3}) - 1 < 0$ e quindi esiste almeno un α t.c. $f(\alpha) = 0$. Unicità. La derivata prima di $f(x)$ è $f'(x) = -sin(x) - 3 < 0$ in $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ considerati. Quindi $f(x)$ decrescente, quindi un solo punto di intersezione con l'asse x.
(Accettato anche $\alpha \in [0, \frac{2}{3}]$ e $\alpha \in [0, 1]$).

ii) Il più immediato metodo che si riesce a definire è quello che deriva dalla risoluzione del seguente metodo di punto fisso:

$$x = \Phi(x) = \frac{\cos(x) + 1}{3}$$

.

Immediato dimostrare che la validità del teorema di convergenza globale. Quindi, fissato $x_0 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, la successione

$$x_{k+1} = \frac{\cos(x_k) + 1}{3}$$

converge all'unico punto di intersezione di $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

(Altre definizioni del metodo di punto fisso erano possibili come ad esempio applicare il metodo di Newton).

iii) $x_0 = 0$ non appartiene all'intervallo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, ma poiché non esistono altre radidi in $[0, \frac{1}{3}]$ e che il teorema di convergenza globale vale anche in $[0, \frac{2}{3}]$, la convergenza è assicurata.

$$x_1 = \frac{cos(x_0) + 1}{3} = 0.66667$$
$$x_2 = \frac{cos(x_1) + 1}{3} = 0.65930$$
$$x_3 = \frac{cos(x_2) + 1}{3} = 0.60933$$
$$x_4 = \frac{cos(x_3) + 1}{3} = 0.60668$$
$$x_5 = \frac{cos(x_4) + 1}{3} = 0.60718$$
$$x_6 = \frac{cos(x_5) + 1}{3} = 0.60709$$
$$x_7 = \frac{cos(x_6) + 1}{3} = 0.60710$$
$$x_8 = \frac{cos(x_7) + 1}{3} = 0.60710$$

Come individuo elemento successione che garantisce errore minore di 10^{-3}?

- Supponendo $x_{k+1} \approx \alpha$, utilizzo

$$|x_{k+1} - x_k| \approx |\Phi'(x_{k+1})||x_{k+1} - x_{k-1}| < 10^{-3}$$

ottengo:

$$0.13462k = 2 : \quad |\Phi'(x_2)||x_2 - x_0| = 0.13462$$
$$k = 2 : \quad |\Phi'(x_3)||x_3 - x_1| = 0.01090$$
$$k = 2 : \quad |\Phi'(x_4)||x_4 - x_2| =$$

- Osservo che da x_5 in poi le tre cifre dopo il punto non cambiano: $x_5 \approx \alpha$

Esercizio 3

Si vuole utilizzare il metodo di Eulero in avanti per l'approssimazione del seguente problema di Cauchy del primo ordine.

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{2}y + v & t \in (0, T] \\ v' = -\frac{1}{2}(y+v) \\ y(0) = 1 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

i) Si trovi per quali valori del passo di discretizzazione h il metodo risulta assolutamente stabile.

ii) Posto $h = 0.5$ si calcoli un'approssimazione di $y(1)$ e $v(1)$.

iii) (A scelta) Scrivere una funzione di MATLAB che implementi il metodo di Eulero in avanti per il problema assegnato.

Svolgimento.
il problema dato si riscrive in forma vettoriale nel modo seguente:

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$$

con

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e posto

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(t_n) \\ v(t_n) \end{pmatrix}$$

il metodo di Eulero in avanti si scrive nel modo seguente: